Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

[BERNIS, p]

On considère l'équation différentielle linéaire de la forme

$$y' = A(t)y + B(t) \quad (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L})$$

où $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^N)$ dérivable, $A \in \mathcal{F}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^N)$.

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On suppose que $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$.
Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$, il existe une et une seule solution $y : I \longrightarrow \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : (**Formulation intégrale du problème**) :
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y : I \to \mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$ si et seulement si :

i) y est continue.

ii) Pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$.

iii) Pour tout $t \in I$:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + B(s)ds$$

Démonstration. Si $y : I \to \mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$, alors y est dérivable sur I donc continue sur I. En intégrant la relation $y'(s) = A(s)y(s) + B(s)$ entre t_0 et t, on obtient :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + B(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + B(s)ds$$

Réciproquement, si $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + B(s)ds$ sur I, comme A, B et y sont continues, y est dérivable sur I et par dérivation, on obtient $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$. De plus, $y(t_0) = y_0$. □

Démonstration. • Cas où I est un intervalle compact : I est donc de la forme $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ avec $\alpha, \beta \geq 0$. On note $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$ qu'on munit de la norme

$$||y||_E = \sup_{t \in I} ||y(t)||$$

Remarquons que $(E, ||.||_E)$ est un espace de BANACH. Pour $y \in E$, la fonction $t \mapsto A(t)y(t) + B(t)$ est continue de I dans $\mathbb{K}^N$ et donc l'application :

$$\Phi(y) : t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)y(s) + B(s))ds$$

est un élément de E.

Donnons-nous $y, \tilde{y} \in E$. Voyons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\Phi^p(y), \Phi^p(\tilde{y}) \in E$ vérifient l'inégalité :

$$\forall t \in I, \quad ||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} ||y - \tilde{y}||_E$$

où $k = \sup_{t \in I} |||A(t)||| < +\infty$.

Pour $p = 0$:

$$||\Phi^0(y)(t) - \Phi^0(\tilde{y})(t))|| = ||y(t) - \tilde{y}(t)|| \leq ||y - \tilde{y}||_E$$

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, $\Phi^p(y) \in E$. Donc $\Phi^{p+1}(y) \in E$. De même, $\Phi^{p+1}(\tilde{y}) \in E$. Soit $t \in I$, $t \geq t_0$, nous avons :

$$\begin{aligned} ||\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{y})|| &\leq \int_{t_0}^t |||A(s)|||.||\Phi^p(y)(s) - \Phi^p(\tilde{y})(s)||ds \\ &\leq \int_{t_0}^t ||A(s)(\Phi^p(y)(s) - \Phi^p(\tilde{y})(s))||ds \\ &\leq k\int_{t_0}^t ||\Phi^p(y)(s) - \Phi^p(\tilde{y})(s)||ds \\ &\leq k\int_{t_0}^t k^p\frac{(s-t_0)^p}{p!}||y-\tilde{y}||_E ds \\ &\leq k^{p+1}\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}||y-\tilde{y}||_E \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. De même pour $t \in I, t < t_0$, on a :

$$||\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{y})|| \leq k^{p+1}\frac{(t_0-t)^{p+1}}{(p+1)!}||y-\tilde{y}||_E$$

d'où le résultat.
Posons $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall t \in I, \quad ||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p\frac{\max(\alpha,\beta)^p}{p!}||y-\tilde{y}||_E$$

Par passage à la borne supérieure sur I, nous obtenons :

$$||\Phi^p(y) - \Phi^p(\tilde{y})||_E \leq k^p\frac{\gamma^p}{p!}||y-\tilde{y}||_E$$

Mais comme la série de terme général $k^p\frac{\gamma^p}{p!}$ converge, il vient que $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p\frac{\gamma^p}{p!} = 0$. On dispose donc d'un p_0 tel que $k^{p_0}\frac{\gamma^{p_0}}{p_0!} \in [0,1[$. Ainsi, Φ^{p_0} est une contraction sur $(E, ||.||_E)$. Par le THÉORÈME DU POINT FIXE ITÉRÉ, Φ admet un point fixe dans E. On en déduit que le problème $(\mathcal{L})$ admet une solution sur I vérifiant $y(t_0) = y_0$.

- Cas où I est un intervalle quelconque : Pour tout intervalle J compact inclus dans I, il existe une unique solution y_J. On définit l'application y de I dans $\mathbb{K}^N$ par $y(t) := y_J(t)$ où J est un intervalle compact inclus dans I quelconque contenant t. Cette définition a bien un sens, car en prenant deux intervalles J_1 et J_2 compacts inclus dans I contenant t, on a unicité sur $J_1 \cap J_2$ et ainsi, $y_{J_1} = y_{J_2}$ sur $J_1 \cap J_2$ et donc $y_{J_1}(t) = y_{J_2}(t)$. Ainsi définie, y définie sur I une solution sur tout cet intervalle. On a donc l'existence d'une solution de $(\mathcal{L})$ définie sur I satisfaisant la condition de CAUCHY $y(t_0) = y_0$.

□

Remarques :

- On utilise le théorème du point fixe ainsi que son corollaire qu'il faut savoir énoncer et démontrer.
- Il faut bien entendu savoir ce qu'il se passe dans le cas plus général (local) et la différence de la nature des solutions.
- Il faut connaître ses applications : toute solution de $(\mathcal{L})$ est globale, dimension de l'espace affine des solutions $(S_{\mathcal{L}})$, etc.